

ASES NA MATEMÁTICA

TESTES INTERMÉDIOS 11º - TRIGONOMETRIA

Teste Intermédio Março de 2013

1. Considere o intervalo $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$
Qual das equações seguintes **não** tem solução neste intervalo?
- (A) $\cos x = -0,5$ (B) $\sin x = -0,5$
(C) $\cos x = -0,9$ (D) $\sin x = -0,9$

Teste Intermédio Março de 2013

2. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico.

Os pontos A , B , C e D são os pontos de intersecção da circunferência com os eixos do referencial.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco BC , nunca coincidindo com B nem com C

Para cada posição do ponto P , seja Q o ponto do arco AB que tem ordenada igual à ordenada do ponto P e seja R o ponto do eixo Ox que tem abcissa igual à abcissa do ponto Q

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\vec{OP}$ $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right)$

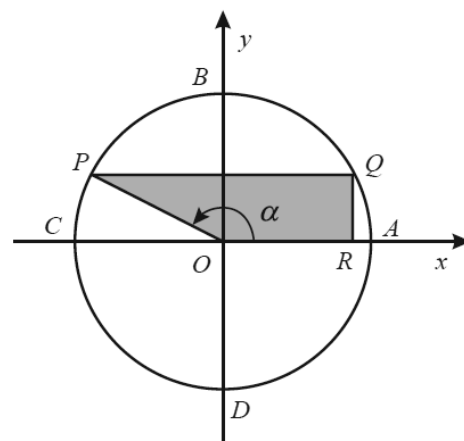


Figura 3

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

Mostre que a área do trapézio $[OPQR]$ é dada por $-\frac{3}{2} \sin \alpha \cos \alpha$

- 2.1. Para uma certa posição do ponto P , a reta OP intersecta a reta de equação $x = 1$ num ponto de ordenada $-\frac{7}{24}$
- 2.2. Determine, para essa posição do ponto P , a área do trapézio $[OPQR]$
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Seja θ um número real. Sabe-se que θ é uma solução da equação $\sin x = -\frac{1}{3}$

Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\sin x = \frac{1}{3}$?

- (A) $\pi - \theta$ (B) $\pi + \theta$ (C) $\frac{\pi}{2} - \theta$ (D) $\frac{\pi}{2} + \theta$

4. Considere o triângulo $[ABC]$ representado na Figura 2.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 2$
- $\hat{ACB} = 30^\circ$

Seja $\alpha = \hat{BAC}$

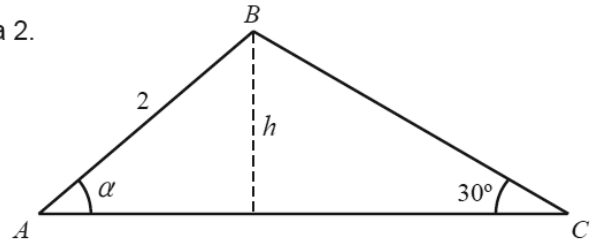


Figura 2

Qual das expressões seguintes representa $\overline{BC}$, em função de α ?

- (A) $4 \sin \alpha$ (B) $6 \sin \alpha$ (C) $4 \cos \alpha$ (D) $6 \cos \alpha$

5. Na Figura 5, está representado, num referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$
- o ponto B tem coordenadas $(3, 0)$

Considere que um ponto P se move sobre a circunferência.

Para cada posição do ponto P , seja $d = \overline{PB}$ e seja $\alpha \in [0, 2\pi[$ a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\vec{OP}$

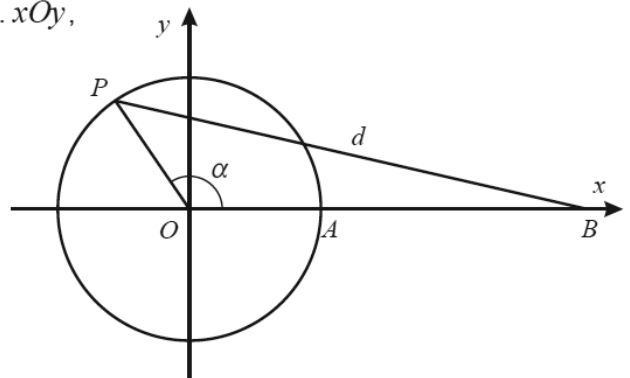


Figura 5

Resolva os itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

- 5.1. Mostre que $d^2 = 10 - 6 \cos \alpha$

Sugestão: Exprima as coordenadas do ponto P em função de α e utilize a fórmula da distância entre dois pontos.

- 5.2. Resolva os dois itens seguintes tendo em conta que $d^2 = 10 - 6 \cos \alpha$

- 5.2.1. Determine os valores de $\alpha \in [0, 2\pi[$ para os quais $d^2 = 7$

- 5.2.2. Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $[0, \pi]$, tem-se $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{35}$

Determine d , para esse valor de α

6. Determine o valor de $3 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ sabendo que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e que $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{4}{5}$

Resolva este item **sem recorrer à calculadora**.

7. Considere, em $\mathbb{R}$, a equação trigonométrica $\cos x = 0,9$
Em qual dos intervalos seguintes esta equação **não** tem solução?

- (A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $[0, \pi]$ (C) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ (D) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

8. Na Figura 2, está representado o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- a recta r é tangente à circunferência no ponto $A(1,0)$
- a recta s passa na origem do referencial e intersecta a recta r no ponto P , cuja ordenada é 2
- o ponto Q , situado no terceiro quadrante, pertence à recta s

Seja α a amplitude, em **radianos**, do ângulo orientado, assinalado na figura, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta OQ

Qual é o valor de α , arredondado às centésimas?

- (A) 4,23
(B) 4,25
(C) 4,27
(D) 4,29

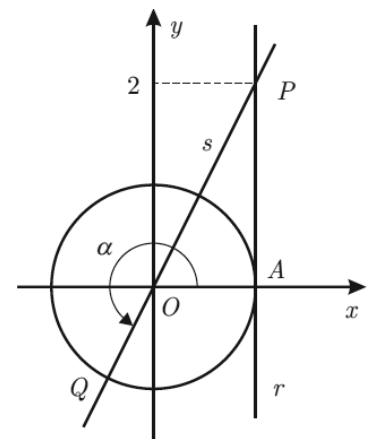


Figura 2

9. Sejam α , β e θ três números reais.

Sabe-se que:

$$\bullet \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[\quad \bullet \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \bullet \alpha + \theta = 2\pi$$

Qual das expressões seguintes é equivalente a $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \theta$?

- (A) $2 \sin \alpha + \cos \alpha$ (B) $2 \sin \alpha - \cos \alpha$ (C) $-\cos \alpha$ (D) $\cos \alpha$

10. Na Figura 3, está representada, em referencial o.n. xOy , a circunferência de centro em O e raio 5

Os pontos A e B são os pontos de intersecção da circunferência com os semieixos positivos Ox e Oy , respectivamente.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco AB , nunca coincidindo com o ponto A , nem com o ponto B

Para cada posição do ponto P , sabe-se que:

- o ponto Q é o ponto do eixo Ox tal que $\overline{PO} = \overline{PQ}$
- a recta r é a mediatriz do segmento $[OQ]$
- o ponto R é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right)$

Seja f a função, de domínio $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, definida por $f(x) = 25 \sin x \cos x$

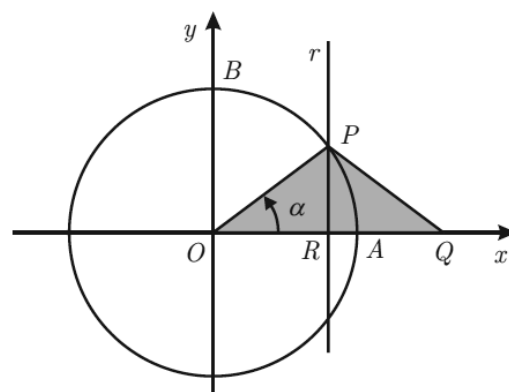


Figura 3

Resolva os itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

10.1. Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $f(\alpha)$

10.2. Determine o valor de α , pertencente ao intervalo $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, para o qual se tem $f(\alpha) = 25 \cos^2 \alpha$

10.3. Seja θ um número real, pertencente ao intervalo $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, tal que $f(\theta) = 5$
Determine o valor de $(\sin \theta + \cos \theta)^2$

10.4. Considere agora o caso em que a abscissa do ponto P é 3

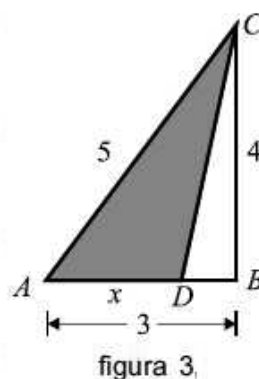
Determine a equação reduzida da recta tangente à circunferência no ponto P

11. Na figura 3, está representado um triângulo rectângulo $[ABC]$ cujos lados medem 3, 4 e 5

Considere que um ponto D se desloca ao longo do cateto $[AB]$, nunca coincidindo com o ponto A

Para cada posição do ponto D , seja x o comprimento do segmento de recta $[AD]$

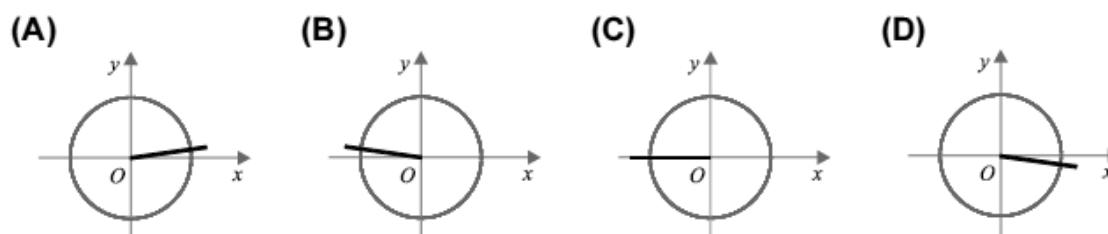
Qual das expressões seguintes dá o perímetro do triângulo $[ACD]$, em função de x ?



- (A) $x + 4 + \sqrt{25 - x^2}$ (B) $x + 5 + \sqrt{25 - x^2}$
 (C) $x + 4 + \sqrt{x^2 - 6x + 25}$ (D) $x + 5 + \sqrt{x^2 - 6x + 25}$

12. Em cada uma das figuras seguintes, está representado, no círculo trigonométrico, a traço grosso, o lado extremidade de um ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox

Em qual das figuras esse ângulo pode ter 3 radianos de amplitude?



13. Considere a equação trigonométrica $\sin x = 0,1$

Em qual dos intervalos seguintes esta equação não tem solução?

- (A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $[0, \pi]$ (C) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ (D) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

16. A Inês olhou para o seu relógio quando este marcava 10 h e 45 min.
Passado algum tempo, ao ver novamente as horas, a Inês concluiu que o ponteiro dos minutos tinha rodado -3π radianos.

Que horas marcava o relógio da Inês, neste último instante?

- (A) 11 h e 15 min (B) 11 h e 45 min (C) 12 h e 15 min (D) 13 h e 45 min

Teste Intermédio Janeiro de 2009

17. Considere a equação trigonométrica $\cos x = -0,3$

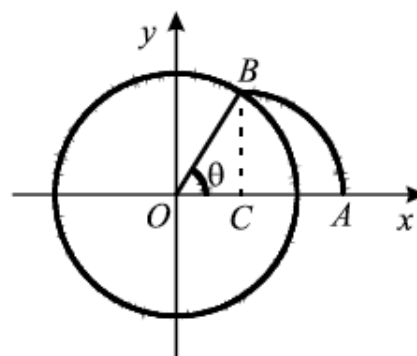
Num dos intervalos seguintes, esta equação tem apenas uma solução. Em qual deles?

- (A) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $[0, \pi]$ (C) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (D) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Teste Intermédio Janeiro de 2009

18. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy :

- o círculo trigonométrico
- o raio $[OB]$ deste círculo
- o arco de circunferência AB , de centro no ponto C



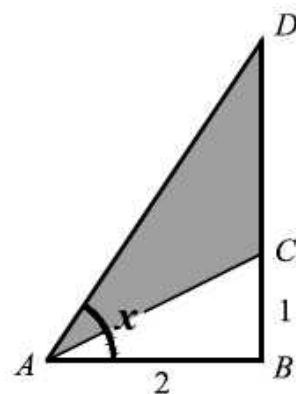
Tal como a figura sugere, o ponto B pertence ao primeiro quadrante, os pontos A e C pertencem ao eixo Ox e a recta BC é perpendicular a este eixo. Seja θ a amplitude do ângulo AOB . Qual é a abcissa do ponto A ?

- (A) $1 + \sin \theta$ (B) $1 + \cos \theta$ (C) $\cos \theta + \sin \theta$ (D) $1 + \cos \theta + \sin \theta$

Teste Intermédio Janeiro de 2009

19. Relativamente à figura junta, sabe-se que:

- o triângulo $[ABD]$ é rectângulo
- o ponto C pertence ao cateto $[BD]$
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo BAD
- $\overline{AB} = 2$ e $\overline{BC} = 1$



- 19.1. Mostre que a área do triângulo $[ACD]$ é dada por $2 \operatorname{tg}(x) - 1$

- 19.2. Determine o valor de x para o qual a área do triângulo $[ACD]$ é igual a 1

- 19.3. Sabendo que $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{5}{13}$ e que $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, determine o valor de $2 \operatorname{tg}(a) - 1$

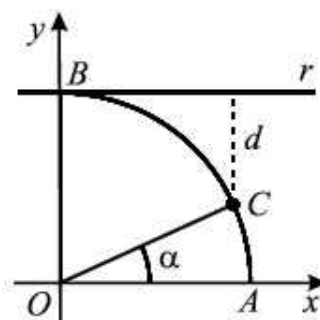
20. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy , um arco de circunferência AB , de centro na origem do referencial e raio igual a 1.

A recta r tem equação $y = 1$

O ponto C pertence ao arco AB

Seja α a amplitude do ângulo AOC

Qual das expressões seguintes dá a distância d do ponto C à recta r ?



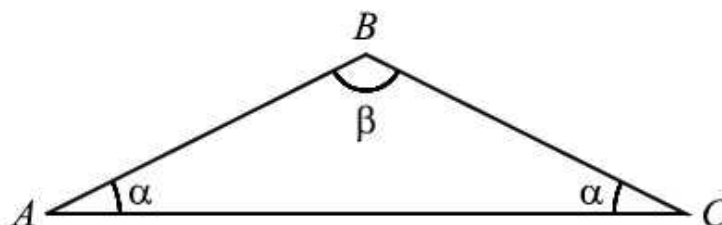
- (A) $1 + \sin(\alpha)$ (B) $1 - \sin(\alpha)$ (C) $1 + \cos(\alpha)$ (D) $1 - \cos(\alpha)$

21. Seja $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

- (A) $\cos(\pi - x)$ (B) $\sin(\pi - x)$ (C) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ (D) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

22. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$ com dois ângulos de amplitude α e um ângulo de amplitude β .



Qual das igualdades seguintes é verdadeira, para qualquer triângulo nestas condições?

- (A) $\cos \beta = \sin(2\alpha)$ (B) $\cos \beta = \cos(2\alpha)$
(C) $\cos \beta = -\sin(2\alpha)$ (D) $\cos \beta = -\cos(2\alpha)$

23. Seja θ um valor pertencente ao intervalo $]\frac{\pi}{2}, \pi[$

Qual das expressões seguintes designa um número real positivo?

- (A) $\cos \theta - \sin \theta$ (B) $\sin \theta \times \cos \theta$ (C) $\sin \theta \times \operatorname{tg} \theta$ (D) $\sin \theta - \operatorname{tg} \theta$

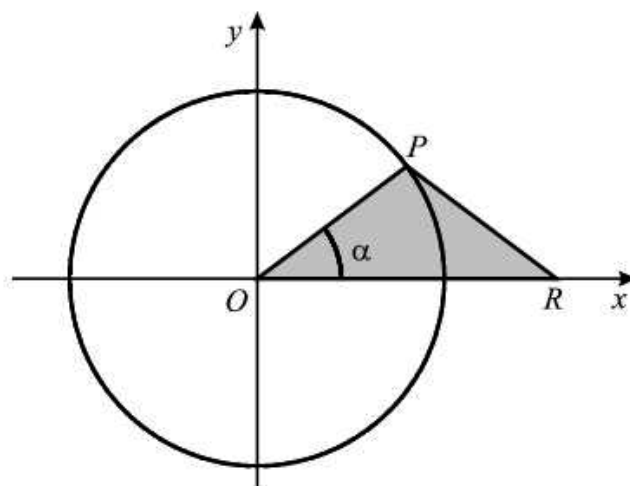
24. Considere a equação $1 + 3 \operatorname{tg}(2x) = 4$.
Qual dos seguintes valores é solução desta equação?

(A) $-\frac{\pi}{8}$ (B) $\frac{3\pi}{8}$ (C) $\frac{5\pi}{8}$ (D) $\frac{7\pi}{8}$

25. Indique as soluções da equação $5 + 2 \cos x = 6$ que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$

(A) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$

26. Na figura está representado o círculo trigonométrico e um triângulo $[OPR]$.



O ponto P desloca-se ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.
O ponto R desloca-se ao longo do eixo Ox , de tal modo que o triângulo $[OPR]$ é sempre isósceles.
Sendo α a amplitude, em radianos, do ângulo ROP , qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[OPR]$, em função de α ?

(A) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ (B) $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
(C) $\frac{1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2}$ (D) $\frac{(1 + \cos \alpha) \cdot \sin \alpha}{2}$

27. Da amplitude α de um certo ângulo orientado sabe-se que $\cos \alpha < 0$ e $\operatorname{tg} \alpha > 0$.
Qual das expressões seguintes dá o valor de $\sin \alpha$?

(A) $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ (B) $-\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ (C) $\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$ (D) $-\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$

28. Sabe-se que $\beta \in \mathbb{R}$ é uma solução da equação $\sin x = \frac{1}{5}$

Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\cos x = -\frac{1}{5}$?

- (A) $\pi + \beta$ (B) $-\frac{\pi}{2} + \beta$ (C) $-\beta$ (D) $-\frac{\pi}{2} - \beta$